

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА В КАНАЛЕ ОБЕССОЛИВАНИЯ ЭЛЕКТРОДИАЛИЗНОГО АППАРАТА

©2014 А. В. Коваленко¹, В. И. Васильева², В. В. Никоненко¹, А. М. Узденова³,
М. Х. Уртенов¹, Р. Sistat⁴, Е. Д. Белашова⁴

¹Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, 350040 Краснодар, Россия

²Воронежский государственный университет, Университетская пл., 1, 394006 Воронеж, Россия,

³Карачаево-Черкесский государственный университет им. У. Д. Алиева ул. Ленина, 29, 369200 Карачаевск,
Россия

⁴Европейский Институт Мембран, ИЦНИ (ЕИМ), Монпелье, Франция
savanna-05@mail.ru

Поступила в редакцию 10.10.2014 г.

Аннотация. Данная работа посвящена разработке теории подобия процессов переноса ионов соли с учетом электроконвекции в канале обессоливания электродиализного аппарата, ограниченного идеально селективными гомогенными анионообменной и катионообменной мембранами. Введены критерии подобия, выяснен их физический смысл и приведены примеры. Высказаны рекомендации по проведению физических и вычислительных экспериментов. Предложены некоторые нетривиальные критерии подобия, с использованием которых проведено исследование влияния на электроконвекцию ряда параметров экспериментов.

Ключевые слова: электродиализ, обессоливание, критериальные числа, уравнения Нернста-Планка-Пуассона и Навье-Стокса, критерии подобия.

ВВЕДЕНИЕ

Явление электроконвекции в мембранных системах представляет интерес для исследований, поскольку является, по мнению многих авторов, основным механизмом сверхпредельного массопереноса. Исследованию электроконвекции посвящено значительное число теоретических [1—18, 25, 26, 31, 32] и экспериментальных работ [11, 14—18, 27, 33, 34]. В этих работах используются, как правило, размерные величины. Поэтому фактически исследуется влияние отдельных факторов (скачка потенциала, средней скорости вынужденного течения раствора, геометрических характеристик канала, начальной концентрации, и т. д.) на процесс переноса. Однако влияние этих факторов проявляется не порознь, а совместно. Вследствие этого возникает проблема введения безразмерных комплексов из размерных величин, имеющих физический смысл и позволяющих выразить внутренние связи процесса. Как известно, для решения этой проблемы используется теория подобия, основанная на переходе к безразмерным параметрам в уравнениях

и формулах, описывающих процесс, с использованием характерных для изучаемой системы величин. В то же время, теория подобия является фактически теорией эксперимента и моделирования, включая физические и численные эксперименты. Три теоремы подобия указывают [21—24], какие величины необходимо измерять в эксперименте и как обрабатывать его результаты, а также как определять границы применимости результатов. Из этих теорем следует, что измерять надо величины, входящие в критерии подобия, а результаты нужно представлять в виде соотношений между критериями подобия, и они справедливы для всех подобных процессов.

Данная работа является продолжением и развитием работы [13]. **Целью** является развитие теории подобия процессов переноса в канале обессоливания с учетом электроконвекции, включая введение и определение физического смысла характерных величин и критериев подобия. В ней предложены некоторые нетривиальные критерии подобия и определен их физический смысл и про-

анализированы характеристики процесса переноса с их учетом.

1. Характерные значения параметров

При проведении и анализе физических и численных экспериментов [14—19, 27] можно видеть, что часть данных, условно говоря, неизменна, а другая часть варьируется от эксперимента к эксперименту. Если ограничиться экспериментами с раствором хлорида натрия, то неизменными можно считать коэффициенты диффузии катиона ($D_1 = 1.33 \cdot 10^{-9}$ м²/с) и аниона ($D_2 = 2.05 \cdot 10^{-9}$ м²/с). Также считаются неизменными плотность раствора $\rho_0 = 1002.5$ кг/м³, коэффициент кинематической вязкости $\nu = 1006 \cdot 10^{-9}$ м²/с. Используются также универсальные постоянные: число Фарадея F , универсальная газовая постоянная R , абсолютная температура T , диэлектрическая проницаемость среды ϵ_0 .

Изменяемыми параметрами, определяющими условия эксперимента, являются ширина канала обессоливания H , которая обычно меняется в зависимости от размера экспериментальной ячейки от 0.5 мм до 10 мм, длина канала L (от 1 мм до десятков сантиметров), средняя скорость вынужденного течения раствора V_0 (от 0 до 10 см/с), начальная концентрация раствора C_0 (от 10^{-3} моль/л до 2 моль/л). В зависимости от выбора режима (гальванодинамический или потенциодинамический) меняется заданная плотность тока или скачок потенциала. Ниже рассматривается потенциодинамический режим и предполагается, что скачок потенциала меняется от $d_\phi = 0$ В до $d_\phi = 3$ В.

2. Безразмерные параметры в уравнениях и краевых условиях

В работе [13] нами был осуществлен переход к безразмерному виду в краевой задаче, соответствующей модели [1], с использованием указанных выше характерных размерных величин, и были введены в рассмотрение следующие безразмерные параметры:

1) ширина $H^{(u)} = 1$ и длина $L^{(u)} = \frac{L}{H} = k_d H^{(u)} = k_d$,

2) число Пекле $Pe = \frac{V_0 H}{D_0}$, являющееся отношением конвективного переноса к молекулярному переносу,

3) число Рейнольдса $Re = \frac{V_0 H}{\nu}$, являющееся

отношением силы инерции $F_{in} = \rho_0 H^2 V_0^2$ к силе вязкого трения $F_{tr} = \nu \rho_0 V_0 H$,

4) малый параметр $\epsilon = \frac{RT\epsilon_0}{H^2 C_0 F^2} = 2 \left[\frac{l_d}{H} \right]^2$, где

$$l_d = \sqrt{\frac{RT\epsilon_0}{2C_0 F^2}} \text{ — Дебаевская длина. Малый параметр является удвоенным квадратом отношения Дебаевской длины к ширине канала. Этот параметр, впервые введен в работах [29, 30].}$$

5) общее критериальное число электрической силы $K_{el} = \frac{RTC_0}{\rho_0 V_0^2}$.

В [13] показано, что постоянную K_{el} можно выразить через электрическую силу $F_{el} = RTC_0 H^2$ и силы инерции:

$$K_{el} = \frac{F_{el}}{F_{in}}, \quad (1)$$

6) общее критериальное число электроконвекции K_{ek} определяется как коэффициент при безразмерной электрической силе, ответственной за электроконвекцию, т. е. в виде:

$$K_{ek} = \epsilon K_{el}, \quad (2)$$

откуда следует его выражения через размерные параметры:

$$K_{ek} = \frac{(RT)^2 \epsilon_0}{\rho_0 V_0^2 H^2 F^2}. \quad (3)$$

Из определения числа электроконвекции K_{ek} следует существование такого его критического значения \bar{K}_{ek} , что при $K_{ek} \geq \bar{K}_{ek}$, электроконвекция возникает во всем канале.

Оценка безразмерных параметров показывает, что для характерных при электролизе значений размерных величин числа Пекле и Рейнольдса имеют порядки $10^2 \div 10^4$ и $1 \div 100$ соответственно. Число ϵ можно считать малым параметром, поскольку его значение меняется от 10^{-17} до 10^{-7} . Числа K_{el} и K_{ek} имеют порядок $10 \div 10^3$ и $10^{-14} \div 10^{-4}$ соответственно.

7) Введем в рассмотрение также безразмерные параметры, входящие в краевые условия [13]:

$$d_\phi^{(u)} = \frac{F}{RT_0} d_\phi, \quad d_0^{(u)} = \frac{F}{RT_0} d_\phi, \quad d_1^{(u)} = \frac{F}{RT_0} d_1, \quad C_{km}^{(u)} = \frac{C_{km}}{C_0},$$

$$C_{am}^{(u)} = \frac{C_{am}}{C_0}, \text{ где } d_\phi^{(u)} \text{ — общее значение потенциала,}$$

$d_0^{(u)}$ — начальное значение потенциала и $d_1^{(u)}$ — темп прироста потенциала, $C_{km}^{(u)}$ и $C_{am}^{(u)}$ — граничные значения концентраций на анионообменной и катионообменной мембранах соответственно.

Кроме того, важным параметром является отношение длины к ширине канала k_d . В рамках модели начальная концентрация в канале и концентрация на входе в канал считаются одинаковыми, хотя могут быть эксперименты, когда они разные. В ряде численных экспериментов для простоты расчетов принято $C_{am} = C_{km} = C_0$.

3. Понятие подобия

Из постановки задачи следует, что **размерными** определяющими параметрами эксперимента являются параметры: $H, L, C_0, V_0, C_{am}, C_{km}$. К этим параметрам нужно добавить еще один параметр, связанный со скачком потенциала. Если исследуется потенциодинамический режим, например, строится вольтамперная характеристика (ВАХ), то обычно $d_0 = 0$, а при потенциостатическом режиме $d_1 = 0$. Поэтому, как правило, со скачком потенциала связан всего один параметр, который обозначается как d_ϕ . Кроме того, к размерным параметрам относится и время проведения эксперимента t_k . Таким образом, имеется восемь размерных параметров, определяющих конкретный эксперимент: $H, L, C_0, V_0, C_{am}, C_{km}, d_\phi, t_k$.

Пусть имеется некоторый **набор размерных данных 1**: $C_{0,1}$ (моль/м³), $V_{0,1}$ (м/с), H_1 (м), L_1 (м), $C_{am,1}$ (моль/м³), $C_{km,1}$ (моль/м³), $d_{\phi,1}$ (В), t_1 (с), и другой **набор размерных данных 2**: $C_{0,2}$ (моль/м³), $V_{0,2}$ (м/с), H_2 (м), $C_{am,2}$ (моль/м³), $C_{km,2}$ (моль/м³), $d_{\phi,2}$ (В), t_2 (с).

Для того чтобы процессы, соответствующие двум разным наборам данных, были подобны необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство безразмерных параметров в системе уравнений и краевых условиях. Как следует из безразмерных уравнений и краевых условий безразмерными параметрами задачи являются параметры $Pe, Re, \varepsilon, K_{el}, K_{ek}, d_\phi, C_{am}, C_{km}, L$. В связи с этим параметры $Pe, Re, \varepsilon, K_{el}, K_{ek}, d_\phi, C_{am}, C_{km}, L$ являются критериями подобия (обычно их называют тривиальными критериями).

Из теории подобия следует, что в экспериментах необходимо измерять величины: $Pe, Re, \varepsilon, K_{el}, K_{ek}, d_\phi, C_{am}, C_{km}, L$, а результаты эксперимента надо представлять в виде нетривиальных критериев подобия (они называются также инвариантами), например, в виде критерияльных зависимостей:
 $K_{ek} = f(Pe, Re, \varepsilon, d_\phi, K_{el}, C_{am}, C_{km}, L)$.

Для каждого явления, изучаемого с помощью критериев подобия, существует свое уравнение, например, при изучении электроконвекции вблизи

катионообменной мембраны нужно выразить безразмерный скачок потенциала d_{km} около мембраны как функцию от $Pe, Re, \varepsilon, K_{el}, K_{ek}, d_\phi, C_{am}, C_{km}, L$.

4. Подобные размерные наборы данных

Выведем соотношения для подобных размерных наборов данных. **Равенство чисел Пекле и Рейнольдса** обеспечивается, если:

$$V_{0,1} \cdot H_1 = V_{0,2} \cdot H_2. \quad (4)$$

Из равенства малых параметров ε следует:

$$C_{0,1} \cdot H_1^2 = C_{0,2} \cdot H_2^2. \quad (5)$$

Из равенства общих критериев электроконвекции получаем:

$$\frac{C_{0,1}}{V_{0,1}^2} = \frac{C_{0,2}}{V_{0,2}^2}. \quad (6)$$

Остальные уравнения имеют вид:

$$\frac{F}{RT_0} d_{\phi,1} = \frac{F}{RT_0} d_{\phi,2}, \quad (7)$$

$$\frac{C_{am,1}}{C_{0,1}} = \frac{C_{am,2}}{C_{0,2}}, \quad (8)$$

$$\frac{C_{km,1}}{C_{0,1}} = \frac{C_{km,2}}{C_{0,2}}, \quad (9)$$

$$\frac{L_1}{H_1} = \frac{L_2}{H_2}. \quad (10)$$

Таким образом, получаем систему уравнений (4—10) для **размерных и изменяемых параметров для подобных задач**. Эта система уравнений имеет однопараметрическое семейство решений. Действительно, выразим из (4) $V_{0,2}$, получим (11), а из (5) выразим $C_{0,2}$ и получим (12):

$$V_{0,2} = \frac{H_1}{H_2} V_{0,1}, \quad (11)$$

$$C_{0,2} = \frac{H_1^2}{H_2^2} C_{0,1}. \quad (12)$$

Подставив в (6), получим тождество, из которого следует, что какой-то параметр, например H_2 , может быть произвольным, тогда два других параметра однозначно выражаются через него, например, согласно формулам (11) и (12).

Остальные уравнения однозначно разрешаются:

$$d_{\phi,2} = d_{\phi,1}, \quad (13)$$

$$C_{am,2} = \frac{C_{0,2}}{C_{0,1}} C_{am,1}, \quad (14)$$

$$C_{km,2} = \frac{C_{0,2}}{C_{0,1}} C_{km,1}, \quad (15) \quad C_{km,2} = \frac{C_{0,2}}{C_{0,1}} C_{km,1} = 100C_{km}, \quad d_{\phi,2} = d_{\phi,1},$$

$$L_2 = \frac{H_2}{H_1} L_1. \quad (16) \quad C_{0,2} = C_{0,1} \left(\frac{H_1}{H_2} \right)^2 \text{ моль/м}^3 = 10 \text{ моль/м}^3.$$

Замечание 1. Принципиальным является, как видно из предыдущих вычислений, только первые три соотношения. После их решения другие параметры просто пересчитываются по формулам.

5. Конкретные примеры подбора безразмерных наборов данных

5.1. Пример расчета набора данных 2 подобного заданному набору 1

Пусть имеется конкретный набор данных 1: $C_{0,1} = 0.1 \text{ моль/м}^3$, $V_{0,1} = 0.1 \text{ м м / с}$, $H_1 = 6.5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $L_1 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, $d_{\phi,1} \text{ В}$, $C_{am,1} \text{ моль/м}^3$, $C_{km,1} \text{ моль/м}^3$. Найдем набор данных 2, эквивалентных набору 1, при длине равной

$L_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$. Из равенства $\frac{L_1}{H_1} = \frac{L_2}{H_2}$ следует, что

тогда $\frac{H_2}{H_1} = \frac{L_2}{L_1} = 10^{-1}$ или $H_2 = 10^{-1} H_1 = 0.65 \cdot 10^{-3} \text{ м}$,

$V_{0,2} = \frac{V_{0,1} H_1}{H_2} = 1 \text{ мм / с}$, $C_{am,2} = \frac{C_{0,2}}{C_{0,1}} C_{am,1} = 100 C_{am}$, и т. д.

Таким образом, получаем набор данных 2 подобный набору данных 1: $C_{0,2} = 10 \text{ моль/м}^3$, $V_{0,2} = 1 \text{ мм/с}$, $H_2 = 0.65 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $L_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $d_{\phi,2} = d_{\phi,1}$, $C_{am,2} = 100 C_{am}$, $C_{km,2} = 100 C_{km}$.

Если, например, известно решение краевой задачи для набора данных 2, то краевая задача для набора данных 1 решается путем преобразования решения для набора данных 2 с использованием простых формул.

Формулы преобразования получаются приравниванием безразмерных величин, например:

$$x^{(u)} = \frac{x_1}{H_1} = \frac{x_2}{H_2}; \quad y^{(u)} = \frac{y_1}{H_1} = \frac{y_2}{H_2}; \quad t^{(u)} = \frac{t_1 V_{0,1}}{H_1} = \frac{t_2 V_{0,2}}{H_2};$$

$$C_i^{(u)} = \frac{C_{i,1}}{C_{0,1}} = \frac{C_{i,2}}{C_{0,2}}, \text{ и т. д., откуда следует, например:}$$

$$x_1 = \frac{H_1}{H_2} x_2; \quad t_1 = \frac{H_1 V_{0,2}}{H_2 V_{0,1}} t_2; \quad C_{i,1}(t_1, x_1, y_1) = \frac{C_{0,1}}{C_{0,2}} C_{i,2}(t_2, x_2, y_2)$$

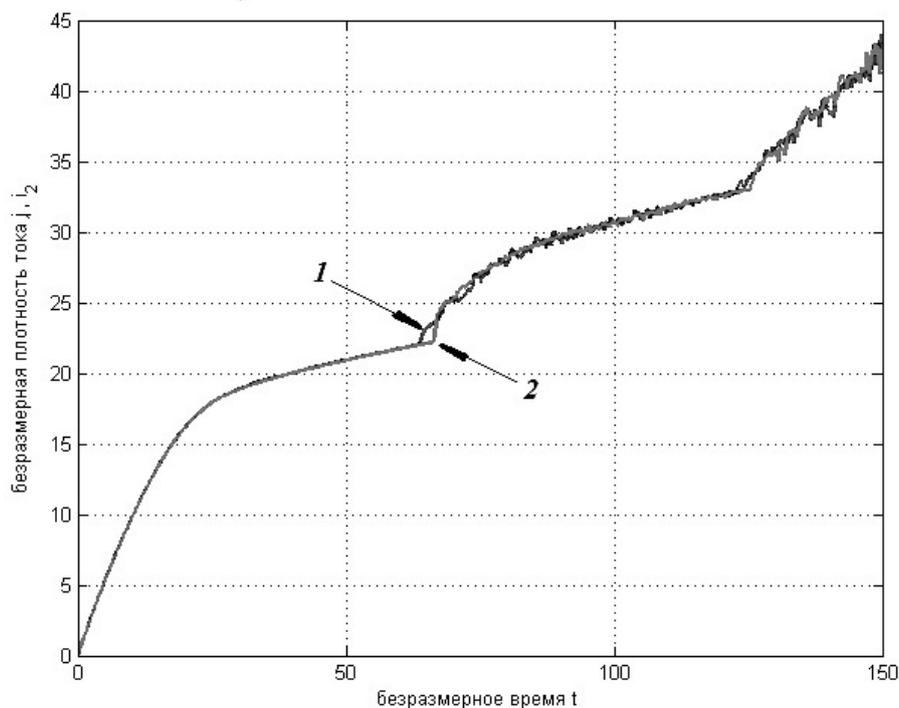


Рис. 1. Зависимость безразмерной плотности тока от безразмерного времени для двух различных, но подобных наборов исходных данных: 1 — первый набор данных, 2 — второй

5.2. Сопоставление решений для подобных наборов данных

Проведем сопоставление решений следующих подобных наборов данных: 1) $C_{0,1} = 0.01 \text{ моль/м}^3$ и $V_{0,1} = 0.8 \text{ мм/с}$, $H_1 = 1 \text{ мм}$, $L_1 = 2 \text{ мм}$, $\alpha_1 = 0.01 \text{ В/с}$.

2) $C_{0,1} = 0.1 \text{ моль/м}^3$ и $V_{0,1} = 2.53 \text{ м м / с}$, $H_1 = 0.316 \text{ мм}$, $L_1 = 0.632 \text{ мм}$, $\alpha_2 = 0.1 \text{ В/с}$.

На рис. 1 приведены ВАХ, посчитанные для обоих наборов данных. Как видно из рис. 1, имеется хорошее совпадение в области стационарности ВАХ. Отчетливо наблюдаемое отличие времени начала электроконвекции для обоих наборов данных объясняется тем, что момент начала электроконвекции является случайной величиной с неко-

торым математическим ожиданием и дисперсией. В области неустойчивости ВАХ тенденции совпадают с большой точностью, но сами значения, подверженные случайным колебаниям, незначительно отличаются. Кстати, если ВАХ численно рассчитать дважды для одного и того же набора данных получим такое же отличие, связанное с различной реализацией одной случайной величины. Анализ рис. 2 показывает, что неустойчивость ВАХ вызвана неустойчивостью области концентрационной поляризации, примыкающей к ионообменным мембранам, что в свою очередь вызвано неустойчивостью размеров электроконвективных вихрей и их бифуркациями.

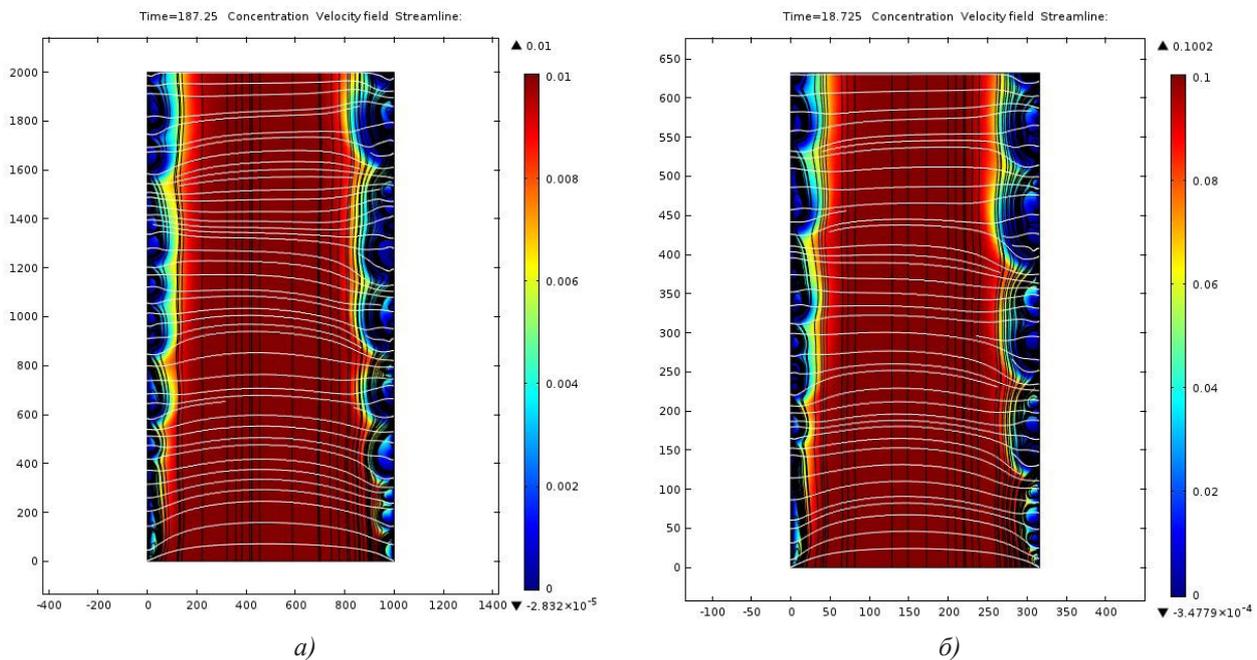


Рис. 2. Распределение концентраций (цветовая шкала), линий тока течения раствора (черный цвет) и плотности тока (белый цвет) при безразмерном времени $t=150$: а) набор данных 1, размерное время $t=187.25 \text{ с}$, б) набор данных 2, размерное время $t=18.725 \text{ с}$

6. Мультипликативные критерии подобия

Нами введены два нетривиальных критерия подобия, названные из-за формы мультипликативными. Один из нетривиальных мультипликативных критериев подобия был установлен выше по определению: $K_{ek} = \epsilon K_{els}$. Для нахождения еще одного нетривиального критерия подобия перемножим следующие тривиальные параметры подобия за-

дачи между собой: $\epsilon = \frac{RT\epsilon_0}{H^2 C_0 F^2}$, $K_{els} = \frac{RTC_0}{\rho_0 V_0^2}$,

$Pe = \frac{V_0 H}{D_0}$, $Re = \frac{V_0 H}{\nu}$, тогда получим

$\epsilon K_{els} Pe Re = \frac{\epsilon_0 (RT)^2}{F^2 \rho_0 D_0 \nu}$. Правая часть является по-

стоянной безразмерной физической величиной:

$k_0 = \frac{\epsilon_0 (RT)^2}{F^2 \rho_0 D_0 \nu}$. С учетом $K_{ek} = \epsilon K_{els}$ из этого равен-

ства получаем выражение (17), из которой следует (18):

$K_{ek} Pe Re = k_0$, (17)

$K_{ek} = \frac{k_0}{Pe Re}$. (18)

Поскольку в данной работе предполагается, что D_0 и v являются постоянными, числа Пекле и Рейнольдса связаны соотношением $Pe = Re \cdot v / D_0$, следовательно (17) может быть переписано в виде:

$$K_{ek} = \frac{k_1}{(Re)^2}, \quad (19)$$

где $k_1 = \frac{D_0 k_0}{v} = \frac{\epsilon_0 (RT)^2}{F^2 \rho_0 v^2}$ — некоторая безразмерная физическая постоянная.

Из (19) следует, что число электроконвекции K_{ek} явно зависит только от Re , причем чем меньше скорость вынужденного течения (Re), тем сильнее развита электроконвекция (зависимость квадратичная). Указанная зависимость следует и непосредственно из вида числа электроконвекции K_{ek} , однако она носит частный характер (при фиксированном значении каждого параметра), а зависимость (19) является общей, комплексной.

В то же время из (19) следует, что от начальной концентрации C_0 и граничных концентраций C_{am} , C_{km} электроконвекция **зависит не явно, а опосредованно**. Численный анализ показывает (рис. 3),

что электроконвекция **слабо зависит** от концентрации C_0 , C_{am} , C_{km} . Уменьшение граничных концентраций $C_{am} = C_{km} = C_0$ на два порядка приводит к незначительному увеличению размеров электроконвективных вихрей. Влияние граничных концентраций $C_{am} = C_{km} = C_0$ на вид ВАХ также несущественно (рис. 4).

Замечание 2. Параметры C_{am} , C_{km} , C_0 оказывают значительное влияние на распределение концентрации и напряженности электрического поля, что видно по критериальному числу ϵ .

7. Локальное критериальное число электроконвекции и пороговая кривая

В работе [13] приведены условия возникновения электроконвекции вблизи катионообменной и анионообменных мембран в размерном виде. В отличие от общего критериального числа для расчета локального критериального числа у поверхности катионообменной мембраны необходимо использовать величину локальной электрической силы $F_{el,km}$ у ее поверхности. Таким образом, критериальное число $K_{el,km}$ электроконвекции у поверхности катионообменной мембраны, можно

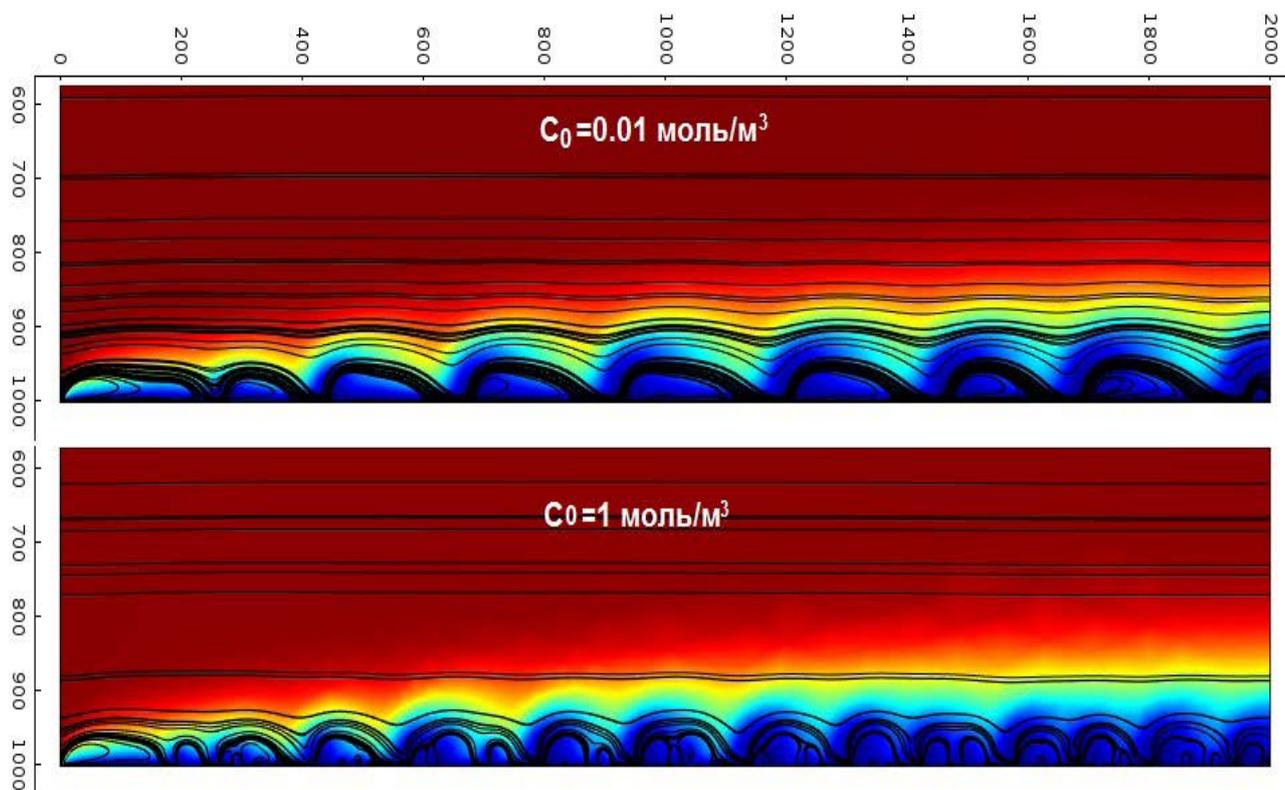


Рис. 3. Линии тока течения раствора при одинаковом значении падения потенциала и различных концентрациях $C_{am} = C_{km} = C_0$. Размеры предпоследних вихрей (по внешней замкнутой линии): 48×167 мкм для $C_{am} = C_{km} = C_0 = 0.01$ моль/м³; 39×77 мкм для $C_{am} = C_{km} = C_0 = 1$ моль/м³

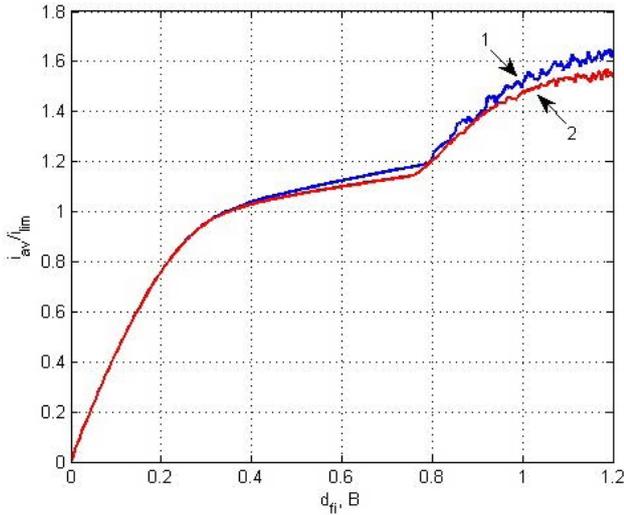


Рис. 4. Вольтамперные характеристики при разных значениях начальных и граничных концентраций $C_{am} = C_{km} = C_0$: $C_{am} = C_{km} = C_0 = 0.01 \text{ моль/м}^3$ (1); $C_{am} = C_{km} = C_0 = 1 \text{ моль/м}^3$ (2).

определить в виде $K_{el,km} = \frac{F_{el,km}}{F_{in}}$. В работе [13] вычислены усредненные электрическая сила и сила инерции, показано, что

$$K_{el,km} = \frac{\epsilon_0 (d_{\phi,km})^2}{\rho_0^2 LDV_0} \quad (20)$$

Из определения числа $K_{el,km}$ следует существование его критического значения $\bar{K}_{el,km}$, что при условии

$$K_{el,km} \geq \bar{K}_{el,km} \quad (21)$$

электрическая сила у поверхности катионообменной мембраны преобладает над силой инерции и начинается электроконвекция у ее поверхности.

Локальные критериальные числа позволяют ввести **понятие пороговой кривой электроконвекции** для электромембранных систем с вынужденной конвекцией. Пусть для определенности, электроконвекция начинается у катионообменной мембраны при некотором критическом значении $\bar{K}_{el,m}$. Выражения (20) и (21) дают соотношение между падением потенциала $d_{\phi,km}$ и средней скоростью V_0 , когда начинается электроконвекция:

$$\frac{\epsilon_0 (d_{\phi,km})^2}{\rho_0^2 LDV_0} \geq \bar{K}_{el,km}$$

Из этой формулы следует, что для того, чтобы при заданной средней скорости вынужденной конвекции V_0 возникла электроконвекция необходимо, чтобы значение падения потенциала $|d_{\phi,km}|$ было выше кривой

$$(d_{\phi,km})^2 = \bar{K}_{el,km} \frac{\rho_0^2 LDV_0}{\epsilon_0} \quad (22)$$

которую можно назвать **пороговой кривой возникновения электроконвекции у катионообменной мембраны**.

Нами на основе математической модели была численно найдена пороговая кривая и приведено ее сопоставление с расчетами по формуле (22), которое показало ее адекватность при небольших скоростях.

Запишем пороговую кривую через безразмерные параметры. Учитывая, что величина $\bar{K}_{el,km}$ является безразмерной, обезразмерим $d_{\phi,km}$ и выразим длину через ширину, тогда $L = k_d H$, а формула (22) запишется в виде (индекс «и» опущен):

$$(d_{\phi,km})^2 = (\hat{K}_{el,km})^2 \text{Re}, \text{ или} \quad d_{\phi,km} = \hat{K}_{el,km} \sqrt{\text{Re}}, \quad (23)$$

где $\hat{K}_{el,km} = \frac{F \rho_0}{RT_0} \sqrt{\frac{vkD_0}{\epsilon_0} \bar{K}_{el,km}}$ — некоторое безразмерное число.

Замечательно простой вид формулы (23) связан с тем, что $d_{\phi,km}$ в принципе зависит от всех безразмерных критериев. С другой стороны важно то, что величину $d_{\phi,km}$ можно измерить в физическом эксперименте.

Замечание 3. Возле анионообменной мембраны справедливо соотношение, аналогичное (23), со своим безразмерным числом $\hat{K}_{el,am}$.

ВЫВОДЫ

В статье предложено развитие теории подобия процессов переноса в канале обессоливания электродиализного аппарата. Выяснен физический смысл коэффициентов подобия. Приведены примеры подобия для размерных наборов данных, что может оказать помощь при интерпретации и сравнении результатов различных экспериментов с использованием электродиализных ячеек с различными геометрическими размерами, помочь распространить результаты, полученные для лабораторных ячеек, на промышленные электродиализаторы.

Развитая теория подобия может использоваться как теория планирования физических и вычислительных экспериментов, поскольку она указывает необходимые для измерений и вычислений безразмерные параметры и в каком виде нужно искать закономерности массопереноса.

Математическая эквивалентность подобных наборов данных не означает вычислительной эквивалентности соответствующих этим наборам краевых задач. Разница в вычислительной сложности может быть значительной. Теория подобия позволяет использовать те наборы данных, для которых численные расчеты удобнее проводить.

В работе выведены новые критерии подобия и проанализированы характеристики процесса переноса с их учетом.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 13-08-93105-НЦНИЛ_а, № 13-08-93106-НЦНИЛ_а и № 13-08-96525_р_юг_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Urtenov M. K., Uzenova A. M., Kovalenko A. V., Nikonenko V. V., Pismenskaya N. D., Vasil'eva V.I., Sistasat P., Pourcelly G. // *Journal Membrane Science*, 2013, vol. 447, pp. 190.
2. Мищук Н. А., Духин С. С. // *Коллоид. журн.*, 1988, т. 50, с. 237—244.
3. Dukhin S. S. // *Adv. Colloid Interface Sci.*, 1991, vol. 35, pp. 173—196.
4. Mishchuk N. A., Takhistov P. V. // *Colloids Surf.*, 1995, A 95, pp. 119—131.
5. Rubinstein I., Shtilman L. // *J. Chem. Soc., Faraday Trans.*, 1979, vol. 75, pp. 231—246.
6. Духин С. С., Мищук Н. А. // *Коллоид, журн.*, 1989, т. 51, № 4, с. 659—671.
7. Mishchuk N., Trond H., Tormod V., Janko A., Helmut K. // *Electrophoresis*, 2009, vol. 30, pp. 3499—34506.
8. Mishchuk N. A., Dukhin S. S. // *In Interfacial Electrokinetics and Electrophoresis*; Delgado A. V., ed. by Marcel Dekker: New York. 2002, pp 241—275.
9. Рубинштейн И., Зальцман Б., Прец И., Линдер К. // *Электрохимия*, 2002, т. 38, № 8, с. 956.
10. Rubinstein I., Zaltzman B., Pudnik T. // *Physical Review E*, 2002, vol. 65, pp. 041507—1—10.
11. Rubinstein S. M., Manukyan G., Staicu A., Rubinstein I., Zaltzman B., Lammertink R. G., Mugele F., Wessling M. // *Physical Review Letters*, 2008, vol. 101, pp. 236101—1—4.
12. Узденова А. М., Коваленко А. В., Никоненко В. В., Уртенков М. Х. // *Конденсированные среды и межфазные границы*, 2011, т. 13, № 4, с. 492—498.
13. Коваленко А. В., Узденова А. М., Уртенков М. Х., Никоненко В. В. // *Конденсированные среды и межфазные границы*, 2013, т. 15, № 4, с. 404—412.
14. Vasil'eva V.I., Zhiltsova A. V., Malykhin M. D., Zabolotskii V. I., Lebedev K. A., Chermit R. Kh., Sharafan M. V. // *Russ. J. Electrochem.*, 2014, vol. 50, iss. 2, p. 120.
15. Rubinstein I., Zaltzman B., Futerman A., Gitis V., Nikonenko V. // *Phys. Review E*, 2009, vol. 79, pp. 021506.
16. Vasil'eva V., Shaposhnik V., Zhiltsova A., Grigorchuk O., Zabolotsky V. // *Desalination and Water Treatment*, 2010, vol. 14, pp. 214.
17. Васильева В. И., Шапошник В. А. Заболоцкий В. И., Лебедев К. А., Петруня И. П. // *Сорбционные и хроматографические процессы*, 2005, т. 5, вып. 4, с. 545.
18. Письменная Н. Д., Никоненко В. В., Мельник Н. А., Пурселли Ж., Ларше К. // *Электрохимия*, 2012, т. 48, № 6, с. 677.
19. Vasil'eva V.I., Shaposhnik V. A., Grigorchuk O. V., Petrunya I. P. // *Desalination*, 2006, vol. 192, pp. 408.
20. Заболоцкий В. И., Никоненко В. В. *Перенос ионов в мембранах*. Москва, Наука. 1996, 392 с.
21. Бусленко Н. П. *Моделирование сложных систем*. Москва, Наука. 1978. 399 с.
22. Веников В. А. *Теория подобия и моделирования*. Москва, Высшая школа. 1976. 479 с.
23. Лебедев А. Л. *Основы теории подобия и моделирования*. Ленинград, ЛЭТИ. 1971. 245с.
24. Хикс Ч. Р. *Основные принципы планирования эксперимента*. Москва, Мир. 1967. 406 с.
25. Уртенков М. Х., Гнусин Н. П., Заболоцкий В. И., Никоненко В. В., Уртенков М. Х. // *Электрохимия*, 1986, Т. 22, № 3, с. 298.
26. Уртенков М. Х., Коваленко А. В. *Краевые задачи для системы электродиффузионных уравнений. Часть I. Одномерные задачи*. Germany. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG. 2011, 280 с.
27. Sistasat Ph., Kozmai A., Pismenskaya N., Larchet Ch., Pourcelly G., Nikonenko V. // *Electrochim. Acta.*, 2008, vol. 53, pp. 6380.
28. Pismenskiy A., Kovalenko A., Urtenov M. // «*Ion transport in organic and inorganic membranes*», Proceeding International Conference, 2014, pp.167.
29. Графов Б. М., Черненко А. А. // *Докл. АН СССР*, 1962, т. 146, № 1, с. 135.
30. Графов Б. М., Черненко А. А. // *Журнал физической химии*, 1963, т. 37, с. 664.
31. Kwak R., Guan G., Peng W. K., Han J. // *Desalination*, 2013, vol. 308, pp. 138—146.
32. Kwak R., Pham V. S., Lim K. M., Han J. // *Physical Review Letter*, 2013, vol. 110, pp. 114501.
33. Ibanes R., Stamatialis D. F., Wessling M. // *J. of Membrane Science*, 2004, vol. 239, pp. 119—128.
34. Choi Y. H., Moon S. H. // *J. Colloid and Interface Science*, 2003, vol. 265, pp. 93—100.

SIMILARITY THEORY OF TRANSPORT PROCESSES IN ELECTRODIALYSIS DESALINATION CHANNEL

©2014 Anna V. Kovalenko¹, Vera I. Vasil'eva², Victor V. Nikonenko¹, Aminat M. Uzdenova³,
Mahamet K. Urtenov¹, Philippe Sizat⁴, Ekaterina D. Belashova⁴

¹Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, 350040 Krasnodar, Russia

²Voronezh State University, Universitetskaya pl., 1, 394006 Voronezh, Russia,
savanna-05@mail.ru

³Karachaev-Cherkessian State University, Lenin str., 29, 369200 Karachaevsk, Russia

⁴Institut Europeen des Membranes, Universite Montpellier 2, CC 047, 34095 Montpellier Cdx 5, France

Abstract. Subject of research — transport processes in electro-membrane systems; theme — the electroconvection; purpose — the development of scaling theory of transport processes in electro-membrane systems. The research method — mathematical and numerical modeling.

The results of the work. A theory of similarity introduced similarity criteria, clarify their physical meaning and examples. Recommendations are given for the physical and computational experiments. Offer some nontrivial similarity criteria using which investigated the effect of some parameters on electroconvection.

Proposed local criterial number allows you to enter the threshold curve electroconvection for electro systems with forced convection. Given the physical meaning of the threshold curve.

Scope of results: theoretical and experimental studies of transport processes in electro systems based electroconvection, simulation and optimization of geometrical and technological parameters of the electro dialysis desalination devices.

Keywords: electro dialysis, desalination, criteria numbers, Nernst-Planck-Poisson equations, Navier-Stokes equations, similarity theory.

REFERENCES

1. Urtenov M. K., Uzdenova A. M., Kovalenko A. V., Nikonenko V. V., Pismenskaya N. D., Vasil'eva V.I., Sizat P., Pourcelly G. *J. Membrane Science*, 2013, vol. 447. pp. 190. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.memsci.2013.07.033>
2. Mishchuk N. A., Dukhin S. S. *Kolloid. zhurn.*, 1988, vol. 50, pp. 237—244.
3. Dukhin S. S. *Adv. Colloid Interface Sci.*, 1991, vol. 35. pp. 173—196.
4. Mishchuk N. A., Takhistov P. V. *Colloids Surf.*, 1995, A 95, pp. 119—131.
5. Rubinstein I., Shtilman L. *J. Chem. Soc., Faraday Trans.*, 1979, vol. 75, pp. 231—246.
6. Dukhin S. S., Mishchuk N. A. *Kolloidnyi zhurnal*, 1989, vol. 51, no. 4, pp. 659—671.
7. Mishchuk N., Trond H., Tormod V., Janko A., Helmut K. *Electrophoresis*, 2009, vol. 30, pp. 3499—34506..
8. Mishchuk N. A., Dukhin S. S. *In Interfacial Electrokinetics and Electrophoresis*; Delgado A. V., ed. by Marcel Dekker: New York. 2002, pp 241—275.
9. Rubinshtein I., Zaltzman B., Pretz J., Linder C. *Russ. J. Electrochem.*, 2002, vol. 38, no. 8, c. 956.
10. Rubinstein I., Zaltzman B., Pudnik T. *Physical Review E*, 2002, vol. 65, pp. 041507—1—10.
11. Rubinstein S. M., Manukyan G., Staicu A., Rubinstein I., Zaltzman B., Lammertink R. G., Mugele F.,

Wessling M. *Physical review letters*, 2008, vol. 101, pp. 236101—1—4.

12. Uzdenova A. M., Kovalenko A. V., Nikonenko V. V., Urtenov M. Kh. *Kondensirovannye sredy i mezhfaznye granitsy*, 2011, vol. 13, no. 4, c. 492—498.

13. Kovalenko A. V., Nikonenko V. V., Uzdenova A. M., Urtenov M. Kh. *Kondensirovannye sredy i mezhfaznye granitsy*, 2013, vol. 15, no. 4, c. 404—412.

14. Vasil'eva V.I., Zhiltsova A. V., Malykhin M. D., Zabolotskii V. I., Lebedev K. A., Chermit R. Kh., Sharafan M. V. *Russ. J. Electrochem*, 2014, vol. 50, iss. 2, p. 120.

15. Rubinstein I., Zaltzman B., Futerman A., Gitis V., Nikonenko V. *Phys. Review E*, 2009, vol. 79, p. 021506.

16. Vasil'eva V., Shaposhnik V., Zhiltsova A., Grigorochuk O., Zabolotsky V. *Desalination and water treatment*, 2010, vol. 14, p. 214.

17. Vasil'eva V.I., Shaposhnik V. A. Zabolotskii V. I., Lebedev K. A., Petrunya I. P. *Sorbtsionnye i khromatograficheskie protsessy*, 2005, vol. 5, no. 4, p. 545.

18. Pismenskaya N.D., Nikonenko V. V., Mel'nik N.A., G. Pourcelly, G. Larchet *Russ. J. Electrochem*, 2012, vol. 48, iss. 6, p. 610.

19. Vasil'eva V.I., Shaposhnik V. A., Grigorochuk O. V., Petrunya I. P. *Desalination*, 2006, vol. 192, p. 408.

20. Zabolotskii V. I., Nikonenko V. V. *Perenos ionov v membranakh*, Moscow, Nauka Publ., 1996. 392 p.

21. Buslenko N. P. *Modelirovanie slozhnykh sistem*, Moscow, Nauka Publ., 1978, 399 p.
22. Venikov V. A. *Teoriya podobiya i modelirovaniya*, Moscow, Vysshaya shkola, Publ., 1976, 479 p.
23. Lebedev A. L. *Osnovy teorii podobiya i modelirovaniya*, Leningrad, LETI Publ., 1971, 245 p.
24. Khiks Ch.R. *Osnovnye printsipy planirovaniya eksperimenta*, Moscow, Mir Publ., 1967, 406 p.
25. Urtenov M. Kh., Gnusin N. P., Zabolotskii V. I., Nikonenko V. V., Urtenov M. Kh. *Elektrokhimiya*, 1986, vol. 22, no. 3, p. 298.
26. Urtenov M. Kh., Kovalenko A. V. *Kraevye zadachi dlya sistemy elektrodifuzionnykh uravnenii. Chast' 1. Odnomernye zadachi*. Germany. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2011, 280 p.
27. Sistat Ph., Kozmai A., Pismenskaya N., Larchet Ch., Pourcelly G., Nikonenko V. *Electrochim. Acta*, 2008, vol. 53, p. 6380.
28. Pismenskiy A., Kovalenko A., Urtenov M. «*Ion transport in organic and inorganic membranes*», Proceeding International Conference, 2014, p. 167.
29. Grafov B. M., Chernenko A. A. *Dokl. AN SSSR*, 1962, vol. 146, no. 1, p. 135.
30. Grafov B. M., Chernenko A. A. *Zhurnal fizicheskoi khimii*, 1963, vol. 37, p. 664.
31. Kwak R., Guan G., Peng W. K., Han J. *Desalination*, 2013, vol. 308, p. 138.
32. Kwak R., Pham V. S., Lim K. M., Han J. *Physical Review Letter*, 2013, vol. 110, p. 114501.
33. Ibanes R., Stamatalis D. F., Wessling M. *J. of Membrane Science*, 2004, vol. 239, p. 119—128.
34. Choi Y. H., Moon S. H. *J. Colloid and Interface Science*, 2003, vol. 265, pp. 93—100.

Коваленко Анна Владимировна — к. экон. н., доцент, доцент кафедры прикладной математики, Кубанский государственный университет; тел.: +7 (918) 4440042, e-mail: savanna-05@mail.ru

Kovalenko Anna V. — Cand. Sci. (Econ.), Associate Professor, Kuban State University; ph.: +7 (918) 4440042, e-mail: savanna-05@mail.ru

Васильева Вера Ивановна — д. х. н., профессор кафедры аналитической химии Воронежского государственного университета; тел.: (473) 2208828, e-mail: viv155@mail.ru

Vasil'eva Vera I. — Dr. Sci. (Chem.), Professor of the Department of Analytical Chemistry, Voronezh State University; ph.: (473) 2208828, e-mail: viv155@mail.ru

Никоненко Виктор Васильевич — д. х. н., профессор, Кубанский государственный университет; тел.: +7 (918) 4145816, e-mail: v_nikonenko@mail.ru

Nikonenko Victor V. — Dr. Sci. (Chem.), Full Professor, Kuban State University; ph.: +7 (918) 4145816, e-mail: v_nikonenko@mail.ru

Узденова Аминат Магомедовна — к. ф.-м. н., доцент, Карачаево-Черкесский государственный университет им. У. Д. Алиева; тел.: +7 (918) 7123471, e-mail: uzd_am@mail.ru

Uzdenova Aminat M. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Karachaevo-Cherkessk State University named after U. D. Aliev, Karachaevsk; ph.: +7 (918) 7123471, e-mail: uzd_am@mail.ru

Уртенов Махамет Хусеевич — д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой прикладной математики, Кубанский государственный университет; тел.: +7 (918) 4659466, e-mail: urtenovmax@mail.ru

Urtenov Mahamet Kh. — Dr. Sci. (Phys.-Math.), Full Professor, Chief of the Department of Applied Mathematics, Kuban State University; ph.: +7 (918) 4659466, e-mail: urtenovmax@mail.ru

Philippe Sistat — PhD, профессор, Европейский Институт Мембран, ИЦНИ (ЕИМ), Монпелье, Франция; тел.: +3 (361) 0116107, e-mail: philippe.sistat@univ-montp2.fr

Philippe Sistat — PhD, Professor, Institut Europeen des Membranes, France; ph.: +3 (361) 0116107, e-mail: philippe.sistat@univ-montp2.fr

Белашова Екатерина Дмитриевна — Европейский Институт Мембран, ИЦНИ (ЕИМ), Монпелье, Франция; аспирантка, тел.: +3 (364) 0142449, e-mail: katbelashva@rambler.ru

Belashova Ekaterina D. — post graduate student, Institut Europeen des Membranes, Universite Montpellier, France; ph.: +3 (364) 0142449, e-mail: katbelashva@rambler.ru